Penerapan Transformasi *Laplace* Modifikasi Pada Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Untuk Osilasi Getaran Mekanis Oleh Gaya Luar

Fitriana Minggani
Program Studi Pendidikan Matematika,STKIP PGRI Sumenep
mathgyz12@gmail.com

ABSTRAK

Transformasi Laplace Modifikasi merupakan salah satu jenis transformasi integral yang memungkinkan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua. Transformasi Laplace Modifikasi diperoleh dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada persamaan Transformasi Laplace yang dinyatakan dalam bentuk $\mathcal{L}_M\{x(t)\} = x(s)=\sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st}\, x(t)dt$ *dengan* $t > 0$ *dan* e^{-st} *merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi untuk* $s \in \mathbb{R}^+$. *Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear pada kasus getaran mekanis sistem pegas yang terjadi osilasi oleh gaya luar tanpa redaman, menggunakan transformasi laplace modifikasi. Hasil penelitian ini memberikan solusi persamaan diferensial linear orde dua yang berbentuk:*

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{m}F_0\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\cdot\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

Sehingga solusi tersebut dapat digunakan untuk mnentukan persamaan getaran mekanis yang dikenai gaya luar.

Kata Kunci: **getaran mekanis, persamaan diferensial linear orde dua, transformasi *laplace* modifikasi**

ABSTRACT

Laplace transform modification is one type of integral transformation used to solve second order linear equations. Laplace transform Modification is obtained by approving the coefficient through the corresponding variables in the Laplace transform that is approved in the form of $\mathcal{L}_M\{x(t)\} = x(s)=\sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st}\, x(t)dt$ *with* $t > 0$ *and* e^{-st} *are kernel transformation functions, also s is the transformation variable for* $s \in \mathbb{R}^+$. *This study improves the completeness of the linear lubrication analysis system carried out by oscillations by external forces without damping, using laplace modification transformations. The results of this study provide a second order linear equation solution that forms:*

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{m}F_0\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\cdot\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

Can be used to determine mechanical acceleration subject to external forces.

Keywords: mechanical vibration, second order linear differential equation, laplace transform modification

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang digunakan secara luas dalam berbagai bidang kehidupan, termasuk dalam menyelesaikan permasalahan di bidang teknik, fisika, ekonomi, biologi, dan yang lainnya. Permasalahan pada bidang tersebut kemudian diidentifikasi, dirumuskan dan dimodelkan utnuk dapat ditentukan solusinya. Adapun pemodelan yang menggunakan simbol matematika dan logika untuk menyajikan permasalahan objek disebut pemodelan matematika atau pemodelan simbolik[2]. Tujuan dari pemodelan matematika adalah untuk memberikan deskripsi terkait keadaan, sifat, maupun perilaku objek agar mudah dikenali, dipelajari maupun dimanipulasi[2]. Hal yang perlu dilakukan saat menyusun model matematika pada suatu permasalahan adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat, memberi lambang pada semua besaran, menentukan besaran kostanta dan variabel, menentukan hubungan variabel dan konstanta sehingga terbentuk model matematika, mencari penyelesaian berdasarkan teori-teori dalam matematika, dan menginterpretasikan solusi model sehingga diperoleh solusi permasalahan.

Salah satu model matematika yang dapat dirumuskan dari suatu permasalahan matematika adalah berbentuk persamaan diferensial linear orde dua homogen maupun non homogen dengan koefisien konstan. Untuk menentukan penyelesaian persamaan tersebut, dapat diterapkan metode transformasi *Laplace*. Hal ini dikarenakan transformasi *Laplace* dapat mereduksi persamaan diferensial ke maslah aljabar[4]. Aljabar tersebut dapat menjadi rumit pada suatu kejadian dan dapat dengan mudah jika dislesaikan dengan menggunakan transformasi *Laplace* daripada diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial secara langsung.

Sebenarnya sebelum ditemukan transformasi *Laplace*, suatu transformasi integral dimulai dengan munculnya transformasi *Fourier* yang kemudian diikuti oleh transformasi *Laplace* pada tahun 1822 yang merupakan turunan dari transformasi *Fourier*[5]. Namun, tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace*. Pada persamaan diferensial biasa dengan koefisien variabel untuk masalah nilai awal dan nilai batas, terdapat beberapa persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace*. Sejalan dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Yusnanda,dkk, yaitu melakukan modifikasi pada transformasi *Laplace* yang dinamakan transformasi *Laplace* modifikasi dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada persamaan Transformasi *Laplace* yang dinyatakan dalam bentuk $\mathcal{L}_M\{f(t)\} = F(s)=\sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ dengan $t > 0$ dan e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi untuk $s \in \mathbb{R}^+$[5].

Penerapan transformasi *Laplace* modifikasi pada suatu persamaan diferensial linear orde dua tesebut salah satunya pada getaran mekanis sistem pegas. Ketika sistem pegas tersebut diberikan gaya luar, menyebabkan persamaan diferensial linear tersebut menjadi lebih rumit. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear pada kasus getaran mekanis sistem pegas yang terjadi osilasi oleh gaya luar tanpa redaman, menggunakan transformasi *laplace* modifikasi.

Tinjauan Pustaka

Transformasi *Laplace*

Transformasi *Laplace* dapat digunakan untuk mereduksi persamaan diferensial ke suatu masalah aljabar. Aljabar tersebut dapat menjadi rumit padea suatu kejadian, tetapi sebenarnya dalam beberapa kasus ini akan lebih sederhana dariapada penyelesaian persamaan diferensial secara langsung [3]. Transformasi *Laplace* secara umum didefinisikan oleh:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

dengan $t > 0$, $\mathcal{L}$ dinamakan operator transformasi Laplace, selanjutnya e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi dalam $s \in \mathbb{R}^+$ [2,3].

Terdapat beberapa sifat penting yang dapat digunakan untuk menentukan Transformasi *Laplace* beberapa fungsi, antara lain:

Sifat Linear [3]

Untuk konstanta c_1 dan c_2 dipunyai

$$\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \qquad (2)$$

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka [4]

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(0) - f(0)$$

E-ISSN: 2654-7775

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

dengan $f^{(r)}(0)$ merupakan nilai dari $f^{(r)}(t)$ pada $t = 0, r = 0,1,2,\ldots,(n-1)$ dan n bilangan bulat positif.

Transformasi *Laplace* Modifikasi [5]

Transformasi *Laplace* secara umum dapat ditulis sebagai $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ seperti pada persamaan (1).

Jika persamaan (1) dikalikan dengan $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$ diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$\sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$\sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}_M\{f(t)\} \quad (4)$$

Notasi $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ merupakan Transformasi *Laplace* modifikasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}_M\{f(t)\}=\sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad (5)$$

Transformasi *Laplace* modifikasi memiliki sifat-sifat seperti operator linear, sifat diferensial, sifat integral, sifat translasi pertama, sifat translasi kedua, sifat konvolusi, dan sifat nilai awal.

Invers Transformasi *Laplace* Modifikasi

Jika transformasi laplace modifikasi [5] dari fungsi $f(t)$ adalah T(s) atau $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ maka fungsi adalah invers transformasi laplace modifikasi dari T(s) dan disimbolkan dengan $\mathcal{L}_M^{-1}\{T(s)\}$. Notasi $\mathcal{L}_M^{-1}$ merupakan notasi invers dari notasi transformasi laplace modifikasi. Hubungan antara fungsi $f(t)$ dan $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ dapat dilihat pada tabel

Tabel 1. Transformasi *Laplace* Modifikasi pada beberapa fungsi

No.	$f(t)$	$\mathcal{L}_M\{f(t)\}$
1.	1	$s^{-\frac{1}{2}}$
2.	t	$s^{-\frac{3}{2}}$
3.	t^n	$n!s^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$
4.	e^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{s-a}$
5.	te^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{(s-a)^2}$
6.	sinat	$\frac{a\sqrt{s}}{s^2+a^2}$
7.	cosat	$\frac{s\sqrt{s}}{s^2+a^2}$

Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat fungsi yang tidak diketahui dan derivatifnya. Persamaan diferensial ditinjau dari banyaknya variabel bebas dari fungsi yang tidak diketahui, dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui adalah fungsi dari satu variabel bebas. Sedangkan, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat derivatif parsial fungsi yang tidak diketahui terhadap dua atau lebih variabel bebas[3]. Untuk orde dari persamaan diferensial ditunjukkan oleh derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut[1].

Selain itu, persamaan diferensial juga dikelompokkan menjadi persamaan linear dan nonlinear. Persamaan diferensial biasa yang dinyatakan ke dalam bentuk $F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ merupakan linear jika F merupakan fungsi linear dari variabel-variabel $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$[3]. Definisi tersebut juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial linear orde-n dengan koefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk umum[3]:

$$a_n(t)\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1}(t)\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = R(t)$$

$$\text{atau } a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = R(t) \tag{6}$$

dimana a_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$

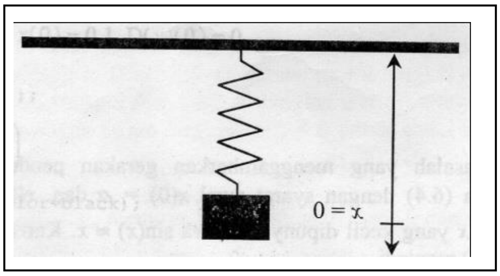
Berdasarkan persamaan (6) sehingga persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = R(t) \tag{7}$$

dengan $a_2 \neq 0$, a_0 dan a_1 adalah konstanta real

Sistem Massa Pegas

Pada kasus ini diperhatikan gerak suatu obyek bermassa m yang digantung pada suatu pegas secara vertikal[3], seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Sistem ini berada pada posisi kesetimbangan ketika dalam posisi diam. Massa tersebut kemudian digerakkan melalui salah satu atau lebih cara berikut: memindahkan massa tersebut dari posisi kesetimbangannya, memberikan kecepatan awal, atau memberikan suatu gaya.



Gambar1. Massa pada suatu pegas di posisi kesetimbangan

Perhatikan posisi obyek sepanjang sumbu vertikal, dengan posisi kesetimbangan di $x = 0$ dan arah positif menurun ke bawah. Diambil $x(t)$ menyatakan posisi obyek pada waktu t dan andaikan obyek dilepaskan saat diam pada posisi x_0. Andaikan bahwa $x(0) = x_0$ dan $\dot{x}(0) = 0$. Jika gaya peredaman diabaikan, seperti hambatan untuk gerak ke media sekitarnya, seperti udara atau minyak, maka terdapat hanya gaya yang bekerja pada obyek yaitu gaya gravitasi yang memberikan suatu tambahan suku mg dan gaya penguatan pegas yang diberikan sesuai hukum *Hooke* oleh kl untuk sebarang konstanta $k > 0$, dengan l adalah panjang pegas terentang dan tertekan dari panjang aslinya. Jika diambil Δl sebagai pertambahan pegas terentang ketika obyek berada pada posisi kesetimbangan, artinya $x = 0$, maka pada suatu saat pegas terentang atau tertekan pada $x + \Delta l$. Jadi pada saat t, gaya yang bekerja pada obyek yaitu

$$F = mg - k(x + \Delta l) \tag{8}$$

E-ISSN: 2654-7775

Hukum ***Hooke*** berbunyi "*Gaya pembalik F dari sebuah pegas adalah sebanding dan berlawanan dari gaya-gaya yang diberikan pada pegas tersebut dan proposional terhadap perpanjangan (pengerutan)* l *dari pegas tersebut, sebagai akibat dari gaya yang diberikan; artinya,* $F=-kl$ *dengan* k *melambangkan konstanta proporsionalitas, yang pada umumnya disebut konstanta pegas".*

Dalam hal khusus, jika obyek diam pada posisi kesetimbangan, maka $x=0$ dan $F=0$

Karena itu, $0=mg-k\Delta l$ atau $mg=k\Delta l$ (9)

Substitusikan persamaan (9) ke (8) yang disederhanakan menjadi $F=-kx$ (10)

Diaplikasikan hukum II Newton dipunyai $m\ddot{x}=-kx$ atau $\ddot{x}=-\frac{k}{m}x$ atau $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$ (11)

Untuk getaran mekanis sistem massa pegas, ketika sistem massa pegas ditarik ke atas dengan gaya luar (sebut saja $F(t)$). Sebagai contoh, puncak gaya pegas yang saling tarik- menarik tiba-tiba bergetar, misalnya seseorang yang berjalan melintas di atasnya. Sebagaimana diberikan pada persamaan (11), persamaan diferensial yang tepat untuk mendeskripsikan perubahan sistem tersebut adalah

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}F(t) \tag{12}$$

dengan *c* merupakan hambatan atau redaman.

Osilasi bebas yang terjadi dibagi menjadi dua kasus[3]. Pertama, osilasi tanpa redaman; kedua, osilasi dengan redaman. Pada penelitian ini lebih fokus pada kasus pertama yaitu osilasi tanpa redaman dan gaya luar yang diberikan dalam bentuk $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, dengan F_0 dan ω (frekuensi sudut yang muncul oleh gaya luar yang diberikan) adalah konstan. Karena osilasi yang terjadi tanpa redaman, sehingga persamaan menjadi:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{1}{m}F_0\cos(\omega t) \tag{13}$$

dengan ω_0 dinotasikan sebagai frekuensi sudut yang muncul dari sistem, dan bernilai

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14}$$

Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mempelajari buku dan jurnal yang berhubungan dengan metode transformasi *laplace* dan sistem gerak pegas untuk osilasi oleh gaya luar;
2. Mempelajari dan memahami definisi yang terkait dengan penerapan metode transformasi laplace pada sistem gerak pegas;
3. Membuat pemodelan dari suatu rangkaian sistem gerak pegas kedalam bentuk persamaan diferensial biasa orde 2.
4. Mempelajari sifat-sifat dan bentuk umum dari transformasi *Laplace*, dilanjutkan dengan sifat-sifat dan bentuk umum dari transformasi *Laplace* modifikasi;
5. Menerapkan metode transformasi *Laplace* modifikasi kedalam persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen yang terbentuk karena pemodelan dari suatu rangkaian osilasi sistem gerak pegas yang dikenai gaya luar;
6. Terlebih dahulu menentukan permisalan syarat awal persamaan diferensial tersebut;
7. Menyelesaikan persamaan diferensial yang dimaksud;
8. Menarik kesimpulan berupa solusi umum penyelesaian dari metode transformasi *laplace* modifikasi terhadap model dari sistem gerak pegas osilasi oleh gaya luar.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Berdasarkan persamaan (13), osilasi sistem gerak pegas tanpa redaman yang dikenai gaya luar tersebut berupa persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen. Selanjutnya akan diberikan syarat awal yang harus dipenuhi sehingga tidak dapat diselesaikan secara langsung maupun dengan metode transformasi *Laplace* seperti biasa. Oleh karenanya akan digunakan transformasi *Laplace* modifikasi. Syarat awal tersebut merupakan saat osilasi pegas berada pada simpangan tertentu dengan kecepatan awal nol.

Jika diberikan syarat awal $x(0) = A,\ x'(0) = B = 0$, dan $\mathcal{L}_M\{x\} = x(s)$, maka dengan menggunakan transformasi *Laplace* modifikasi pada kedua ruas dari persamaan (13), diperoleh:

$$\mathcal{L}_M\left\{\ddot{x} + \omega_0^2 x\right\} = \mathcal{L}_M\left\{\frac{1}{m} F_0 \cos\omega t\right\}$$

$$\mathcal{L}_M\{\ddot{x}\} + \mathcal{L}_M\{\omega_0^2 x\} = \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M\{cos\omega t\}$$

$$\mathcal{L}_M\{\ddot{x}\} + \omega_0^2 \mathcal{L}_M\{x\} = \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M\{cos\omega t\}$$

$$\left[s^2 \mathcal{L}_M(x) - s\sqrt{s}\,x(0) - \sqrt{s}\,x'(0)\right] + \omega_0^2 x(s) = \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M\{cos\omega t\}$$

$$\left[s^2 x(s) - s\sqrt{s}\,A - \sqrt{s}\,B\right] + \omega_0^2 x(s) = \frac{1}{m} F_0 \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$s^2 x(s) + \omega_0^2 x(s) = s\sqrt{s}\,A + \sqrt{s}\,B + \frac{1}{m} F_0 \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

karena $B = 0$, sehingga

$$(s^2 + \omega_0^2) x(s) = s\sqrt{s}\,A + \frac{1}{m} F_0 \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$x(s) = A\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right) + \frac{1}{m} F_0 \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right) \qquad (15)$$

Setelah mendapatkan bentuk sederhana dari fungsi hasil transformasi, kemudian persamaan (15) ditransformasikan dengan invers transformasi *Laplace* modifikasi sehingga diperoleh solusi dari persamaan diferensial yang diberikan:

$$\mathcal{L}_M^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}_M^{-1}\left\{A\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right) + \frac{1}{m} F_0 \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

dengan kata lain,

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{2m\omega_0} F_0 \mathcal{L}_M^{-1}\left\{2 \cdot s \cdot \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{\omega_0\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s\sqrt{s}}\right)\right\}$$

Berdasarkan Tabel 1., didapatkan

$$x(t) = Acos(\omega_0 t - \Phi) + \frac{F_0 \cdot t}{2m\omega_0} sin(\omega_0 t)$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan terkait penerapan transformasi *Laplace* modifikasi pada permasalahan pemodelan matematika dalam mencari persamaan osilasi massa pegas oleh gaya luar yang berupa PD linier orde dua nonhomogen dengan koefisien konstan, dapat dilakukan dengan menganalisis terlebih dahulu komponen-komponen yang bekerja pada sistem massa pegas yang ditambah dengan gaya luar, sehingga terbentuk persamaan diferensial linear homogen dengan syarat awal. Bentuk umum persamaannya adalah

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos(\omega t).$$

Ambil transformasi *Laplace* modifikasi dari persamaan diferensial dan gunakan syarat awalnya sehingga terbentuk $\mathcal{L}_M\{x\} = x(s)$. Selanjutnya, digunakan invers transformasi *Laplace* modifikasi dari $x(s)$ sehingga terbentuk $x(t) = \mathcal{L}_M^{-1}\{x(s)\}$. Akibatnya, persamaan osilasi getaran pegas oleh gaya luar diperoleh

$$x(t) = A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{m} F_0 \mathcal{L}_M^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) \cdot \left(\frac{s\sqrt{s}}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}$$

E-ISSN: 2654-7775

Daftar Pustaka

[1] Boyce, W.E, Di Prima R.C., 2012, *Elementary Differential Equations Tenth Edition*. New York: Wiley and Sons

[2] Maharani, R., 2017, *Aplikasi Transformasi Laplace Pada Persamak an Diferensial Orde Dua Untuk Pendulum Sederhana dan Pendulum Fisis*, Jurnal Konstanta, Vol 1 No. 1, Juli-Desember

[3] Nugroho, D.B., 2011, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu

[4] Ross, LS. *Differential Equations Third Edition*. Wiley and Sons: New York; 1984.

[5] Yusnanda, Helmi, dan Yudhi, 2019, *Transformasi Laplace Modifikasi untuk Menyelesaikan Beberapa Persaman Diferensial Biasa Linear*, Buletin Ilmiah Mat, Stat, dan Penerapannya (Bimaster), Vol 8: 53-62